数理解析研究所講究録 1451 巻 2005 年 195-198

ℓ 進層の Euler 数（加藤和也氏との共同研究）

東京大学・数理科学研究科 斎藤 毅（Takeshi Saito）
Department of Mathematical Sciences,
University of Tokyo

F を標数 $p>0$ の代数閉体，U を F 上スムーズな次元 d の分離有限型スキームとする．ℓ を p と異なる素数とし，$\mathcal{F}$ を U 上のスムーズ ℓ 進層とする．$\mathcal{F}$ の Euler 数 $\chi_c(U,\mathcal{F})$ は，

$$\chi_c(U,\mathcal{F})=\sum_{q=0}^{2d}(-1)^q\dim H_c^q(U,\mathcal{F})$$

で定義される．$\mathcal{F}$ が定数層 $\mathbb{Q}_\ell$ のときは，$\chi_c(U,\mathbb{Q}_\ell)$ を $\chi_c(U)$ で表す．

$d=1$ のときは，Euler 数 $\chi_c(U,\mathcal{F})$ は，Grothendieck-Ogg-Shafarevich 公式

$$\chi_c(U,\mathcal{F})-\operatorname{rank}\mathcal{F}\cdot\chi_c(U)=\deg \operatorname{Sw}(\mathcal{F})$$

で求められる ([1] Exposé X)．ここでは，一般次元の U に対し，Swan 類 $\operatorname{Sw}(\mathcal{F})$ を無限遠に台をもつ 0 サイクル類として定義し，Grothendieck-Ogg-Shafarevich 公式の高次元化を与える．詳細はプレプリント [2] にあるので，ここでは概要だけを述べる．

1 Swan 類と Grothendieck-Ogg-Shafarevich 公式の高次元化

まず，ℓ 進層の Swan 類を定義する．U と $\mathcal{F}$ を上のとおりとし，$U\to X$ を F 上の固有スキームへの開うめこみとする．ここでは，話を簡単にするため，次の仮定をおく．

1. $\mathcal{F}$ は，U の有限エタール Galois 被覆 $f:V\to U$ 上で，定数層となる．

2. カルテシアン図式

$$\begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & Y \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \bar f} \\ U & \longrightarrow & X \end{array}$$

で，Y は F 上固有スムーズかつ，V は Y の単純正規交叉因子 D の補開部分スキームとなるものがある．

一般にはこれらの条件はみたされないが，次のように修正することで，一般の場合も定義される．1では，$\mathcal{F}$の法ℓ還元を自明化する被覆をとる．そして，下に与えるSwan類$\mathrm{Sw}(\mathcal{F})$の定義では，跡の代わりにBrauer跡を用いる．2では，特異点解消の代わりにオルタレイションを用いる．

$D_1, D_2, \ldots, D_m$をDの既約成分とする．$(Y\times Y)' \to Y\times Y$を，閉部分スキームの族$D_1\times D_1, D_2\times D_2, \ldots, D_m\times D_m$でのブローアップとする．すなわち，これらを定めるイデアル層の積によるブローアップとする．$(Y\times Y)'$は$2d$次元の固有スムーズスキームである．対角射$Y=\Delta_Y \to Y\times Y$は，log対角射$Y=\Delta_Y^{\log} \to (Y\times Y)'$をひきおこす．

$\sigma\in G$に対し，$\sigma: V\to V$のグラフを$\Gamma_\sigma \subset V\times V$で表し，その$(Y\times Y)'$での閉包を$\overline{\Gamma}_\sigma$とする．$s_{V/U}(\sigma)\in CH_0(Y\setminus V)$を，

$$s_{V/U}(\sigma)=\begin{cases} -(\overline{\Gamma}_\sigma, \Delta_Y^{\log})_{(Y\times Y)'} & \sigma\neq 1 \text{のとき} \\ -\sum_{\tau\neq 1} s_{V/U}(\tau) & \sigma=1 \text{のとき}\end{cases}$$

で定める．$V\to U$はエタールだから，$\sigma\neq 1$のとき，Γ_σと対角Δ_Vの共通部分は空である．これより，交点積$(\overline{\Gamma}_\sigma, \Delta_Y^{\log})_{(Y\times Y)'}$は，$CH_0(Y\setminus V)$の元を定める．$CH_0$は0サイクルの有理同値類のなすChow群を表す．

Mを$\mathcal{F}$に対応するGの表現とすると，Swan類$\mathrm{Sw}(\mathcal{F})\in CH_0(X\setminus U)_{\mathbb{Q}}$は，

$$\mathrm{Sw}(\mathcal{F})=\frac{1}{|G|}\sum_{\sigma\in G}\bar{f}_* s_{V/U}(\sigma)\mathrm{Tr}(\sigma : M)$$

で定義される．添字$_{\mathbb{Q}}$は$\otimes\mathbb{Q}$を表す．正確にいうと，上の定義では，$\mathrm{Sw}(\mathcal{F})$は$CH_0(X\setminus U)_{\mathbb{Q}_\ell}$の元として定義されることになるが，簡単な修正により，$CH_0(X\setminus U)_{\mathbb{Q}}$の元として定義される．この修正は実は不要であり，同じ元を定めるものと予想される．

$Y\to X$が代数曲線の有限射であるときは，上の構成は，通常のSwan導手の定義([1] Exposé X)の，幾何的な言換えである．

このSwan類を使って，Grothendieck-Ogg-Shafarevich公式の高次元化が定式化される．

定理1　UをF上のスムーズ・スキーム，$X\supset U$をコンパクト化とする．U上のスムーズℓ進層$\mathcal{F}$に対し，

$$\chi_c(U,\mathcal{F})-\mathrm{rank}\ \mathcal{F}\cdot\chi_c(U)=\deg\ \mathrm{Sw}(\mathcal{F})$$

がなりたつ．

定理1の証明は，標準的な論法により，跡公式

$$\mathrm{Tr}(\sigma : H_c^*(V,\mathbb{Q}_\ell))=\deg\ (\overline{\Gamma}_\sigma, \Delta_Y^{\log})_{(Y\times Y)'}$$

$(\sigma\neq 1)$に帰着される．左辺は，交代和$\sum_{q=0}^{2d}(-1)^q\mathrm{Tr}(\sigma : H_c^q(V,\mathbb{Q}_\ell))$を表す．跡公式の証明は，節を改めて解説する．

2 開多様体に対する Lefschetz 跡公式

記号を変えて，この節では，X を F 上の固有スムーズ・スキームとし，U を X の単純正規交叉因子 D の補開部分スキームとする．$\Gamma \subset U \times U$ を閉部分スキームとし，$p_1, p_2 : \Gamma \to U$ で各成分への射影との合成を表す．

代数的対応 Γ のコホモロジーへの作用 $\Gamma^* = p_{1*} \circ p_2^* : H_c^q(U, \mathbb{Q}_\ell) \to H_c^q(U, \mathbb{Q}_\ell)$ は，無条件には定義されないが，$p_2 : \Gamma \to U$ が固有なら定義される．$\bar{\Gamma} \subset X \times X$ を Γ の閉包とすると，$p_2 : \Gamma \to U$ が固有という条件は，

$$(!) \qquad \bar{\Gamma} \cap (D \times X) \subset \bar{\Gamma} \cap (X \times D)$$

と同値である．交代和 $\mathrm{Tr}(\Gamma^* : H_c^*(U, \mathbb{Q}_\ell)) = \sum_{q=0}^{2d} (-1)^q \mathrm{Tr}(\Gamma^* : H_c^q(U, \mathbb{Q}_\ell))$ に対するよい跡公式を得るため，条件 (!) よりも強い条件を設定する．

前節と同様に，$(X \times X)' \to X \times X$ を，$D_1 \times D_1, D_2 \times D_2, \ldots, D_m \times D_m$ でのブローアップとする．$(D \times X)', (X \times D)' \subset (X \times X)'$ を，それぞれ $D \times X, X \times D$ の固有変換とする．このとき，次の跡公式が得られる．

定理 2 $\Gamma \subset U \times U$ を閉部分スキームとし，$\bar{\Gamma}' \subset (X \times X)'$ をその閉包とする．条件

$$(!') \qquad \bar{\Gamma}' \cap (D \times X)' \subset \bar{\Gamma}' \cap (X \times D)'$$

を仮定する．このとき，条件 (!)$\bar{\Gamma} \cap (D \times X) \subset \bar{\Gamma} \cap (X \times D)$ がなりたち，等式

$$\mathrm{Tr}(\Gamma^* : H_c^*(U, \mathbb{Q}_\ell)) = \deg(\bar{\Gamma}', \Delta_X^{\log})_{(X \times X)'}$$

がなりたつ．

定理 2 から定理 1 を導くには，$\Gamma = \Gamma_\sigma$ が，定理 2 の条件 (!′) を満たすことを確めればよい．

以下，定理 2 の証明の方針を述べる．まず，$X = U$ の場合の通常の跡公式の証明を，簡単に復習する．$[\Gamma] \in H^{2d}(X \times X, \mathbb{Q}_\ell(d))$ を Γ のサイクル類とし，$[\Delta] \in H^{2d}(X \times X, \mathbb{Q}_\ell(d))$ を Δ のサイクル類とする．$\cup : H^{2d}(X \times X, \mathbb{Q}_\ell(d)) \times H^{2d}(X \times X, \mathbb{Q}_\ell(d)) \to H^{4d}(X \times X, \mathbb{Q}_\ell(2d))$ をカップ積とし，$\mathrm{Tr} : H^{4d}(X \times X, \mathbb{Q}_\ell(2d)) \to \mathbb{Q}_\ell$ を跡写像とする．Lefschetz 跡公式 ([1] Exposé III) より，

$$\mathrm{Tr}(\Gamma^* : H^*(X, \mathbb{Q}_\ell)) = \mathrm{Tr}([\Gamma] \cup [\Delta])$$

がなりたつ．カップ積と交点積，および跡射と次数射の両立性より，

$$\mathrm{Tr}([\Gamma] \cup [\Delta]) = \deg(\Gamma, \Delta)_{X \times X}$$

である．これより，$\mathrm{Tr}(\Gamma^* : H^*(X, \mathbb{Q}_\ell)) = \deg(\Gamma, \Delta)_{X \times X}$ がえられる．

一般の場合には，この証明を次のように修正する．$U \times U \xrightarrow{j_1} X \times U \xrightarrow{j_2} X \times X$ を開埋め込みとする．条件 (!) より，サイクル類 $[\Gamma] \in H^{2d}(X \times X, Rj_{2*}j_{1!}\mathbb{Q}_\ell(d))$ が定義される．同様に，$[\Delta] \in H^{2d}(X \times X, j_{2!}Rj_{1*}\mathbb{Q}_\ell(d))$ が定義される．$\cup : H^{2d}(X \times X, Rj_{2*}j_{1!}\mathbb{Q}_\ell(d)) \times H^{2d}(X \times X, j_{2!}Rj_{1*}\mathbb{Q}_\ell(d)) \to H^{4d}(X \times X, j_{2!}j_{1!}\mathbb{Q}_\ell(2d))$ をカップ積

とし，Tr : $H^{4d}(X\times X, j_{2!}j_{1!}\mathbb{Q}_\ell(2d)) \to \mathbb{Q}_\ell$ を跡写像とすると，Lefschetz 跡公式 ([1] Exposé III) より，

$$\mathrm{Tr}(\Gamma^* : H_c^*(U,\mathbb{Q}_\ell)) = \mathrm{Tr}([\Gamma]\cup[\Delta])$$

がなりたつ．

$\mathrm{Tr}([\Gamma]\cup[\Delta]) = \deg(\bar\Gamma', \Delta^{\log})_{(X\times X)'}$ を示す．$(X\times X)^\sim = (X\times X)'\setminus((D\times X)'\cup(X\times D)')$ とおき，$\tilde\Gamma = \bar\Gamma'\cap(X\times X)^\sim$ とおく．$(X\times X)^\sim \xrightarrow{j'_1} (X\times X)'\setminus(X\times D)' \xrightarrow{j'_2} (X\times X)'$ を開うめこみとする．仮定 (!') より，サイクル類 $[\tilde\Gamma]\in H^{2d}((X\times X)', Rj'_{2*}j'_{1!}\mathbb{Q}_\ell(d))$ が定義される．同様に，$[\Delta^{\log}]\in H^{2d}((X\times X)', j'_{2!}Rj'_{1*}\mathbb{Q}_\ell(d))$ も定義される．標準写像 $H^{2d}(X\times X, Rj_{2*}j_{1!}\mathbb{Q}_\ell(d)) \to H^{2d}((X\times X)', Rj'_{2*}j'_{1!}\mathbb{Q}_\ell(d)), H^{2d}(X\times X, j_{2!}Rj_{1*}\mathbb{Q}_\ell(d)) \to H^{2d}((X\times X)', j'_{2!}Rj'_{1*}\mathbb{Q}_\ell(d))$ は同型であり，サイクル類 $[\Gamma], [\Delta]$ を，それぞれ $[\tilde\Gamma], [\Delta^{\log}]$ にうつす．図式

$$\begin{array}{ccc}
\begin{array}{c} H^{2d}(X\times X, Rj_{2*}j_{1!}\mathbb{Q}_\ell(d)) \\ \times H^{2d}(X\times X, j_{2!}Rj_{1*}\mathbb{Q}_\ell(d)) \end{array} & \longrightarrow & H^{4d}(X\times X, j_{2!}j_{1!}\mathbb{Q}_\ell(2d)) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\begin{array}{c} H^{2d}((X\times X)', Rj'_{2*}j'_{1!}\mathbb{Q}_\ell(d)) \\ \times H^{2d}((X\times X)', j'_{2!}Rj'_{1*}\mathbb{Q}_\ell(d)) \end{array} & \longrightarrow & H^{4d}((X\times X), j'_{2!}j'_{1!}\mathbb{Q}_\ell(2d))
\end{array}$$

は可換であり，

$$\mathrm{Tr}([\Gamma]\cup[\Delta]) = \mathrm{Tr}([\tilde\Gamma]\cup[\Delta^{\log}])$$

が得られる．さらに，カップ積と交点積および，跡写像と次数射の両立性より，

$$\mathrm{Tr}([\tilde\Gamma]\cup[\Delta^{\log}]) = \deg(\bar\Gamma', \Delta^{\log})_{(X\times X)'}$$

である．よって，$\mathrm{Tr}(\Gamma^* : H_c^*(U,\mathbb{Q}_\ell)) = \deg(\bar\Gamma', \Delta^{\log})_{(X\times X)'}$ が示された．

おわりに，跡公式の例を２つあげる．どちらの例でも，$U = \mathbf{A}^1 \subset X = \mathbf{P}^1$ とする．このとき，$H_c^q(U,\mathbb{Q}_\ell)$ は，$q=2$ のとき１次元で，それ以外のときは０である．

例１．$F : U \to U$ を Frobenius 自己準同型とする．F^* の $H_c^2(U,\mathbb{Q}_\ell)$ への作用は p 倍であり，$\mathrm{Tr}(F^* : H_c^*(U,\mathbb{Q}_\ell)) = p$ である．転置 F_* の $H_c^2(U,\mathbb{Q}_\ell)$ への作用は１倍であり，$\mathrm{Tr}(F^* : H_c^*(U,\mathbb{Q}_\ell)) = 1$ である．$\deg(\Delta, \Gamma_F)_{(X\times X)^\sim} = p$ である．

F^* は条件 (!') をみたし，$\mathrm{Tr}(F^* : H_c^*(U,\mathbb{Q}_\ell)) = \deg(\Delta,\Gamma_F)_{(X\times X)^\sim} = p$ がなりたつ．F_* は条件 (!') をみたさず，$\mathrm{Tr}(F_* : H_c^*(U,\mathbb{Q}_\ell)) = 1 \neq \deg(\Delta,\Gamma_F)_{(X\times X)^\sim} = p$ である．

例２．$f : U \to U$ を自己同型 $x \mapsto x+1$ とする．このとき，f^* の $H_c^2(U,\mathbb{Q}_\ell)$ への作用は１倍であり，$\mathrm{Tr}(F^* : H_c^*(U,\mathbb{Q}_\ell)) = 1$ である．このときも条件 (!') がなりたち，$\mathrm{Tr}(F^* : H_c^*(U,\mathbb{Q}_\ell)) = \deg(\Delta,\Gamma_f)_{(X\times X)^\sim} = 1$ である．

References

[1] A. Grothendieck et. al., *Cohomologie ℓ-adique et Fonction L,* SGA 5, Springer LNM **589** (1977).

[2] K. Kato, T. Saito, *Ramification theory of schemes over a perfect field*, preprint. math.AG/0402010